НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ДВУХСЛОЙНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

А. В. Кузнецов

НИИММ Казанского государственного университета

Изучение неустановившихся течений жидкости со свободными границами и границами раздела сред является важной проблемой гидродинамики, богатой разнообразными приложениями. Решение нестационарных задач в нелинейной постановке вызывает большие трудности, обусловленные прежде всего тем, что жидкие границы заранее неизвестны и, вообще говоря, изменяются со временем.

При применении численных методов, на которые возлагаются большие надежды, также могут возникать трудности, связанные с возможным разрушением первоначально гладких границ в процессе их эволюции. Это явление может быть обусловлено не погрешностями методов, хотя и может иметь место, а является особенностью развития нелинейных возмущений. Так, было доказано [1, 2], что классическая задача Коши-Пуассона о гравитационных поверхностных волнах разрешима в классе аналитических свободных границ лишь для конечных отрезков времени. Для решения практических задач, связанных прежде всего с движением тел в жидкости с большими скоростями, находят применение приближенные методы, основанные на тех или иных упрощениях, допускаемых рассматриваемым классом задач.

Для исследования неустановившихся течений жидкости со свободными границами широко используются линейная теория и теория слабо возмущенных течений.

Линейная теория базируется на полной линеаризации задачи, т.е. линеаризуются как уравнения движения, так и границы области течения и граничные условия.

В теории слабо возмущенных течений линеаризуются лишь граничные условия для нестационарных возмущений известного априори стационарного течения и сносятся на границы этого течения.

Метод слабо возмущенных течений Гуревича-Хаскинда бал развит в работах автора и его учеников и последователей. Были решены многие задачи струйного обтекания колеблющихся и деформируемых препятствий. Дальнейшее развитие этот метод получил в работе [3], в которой решена задача о струйном обтекании колеблющегося препятствия с нелинейным динамическим условием на свободных границах. Было установлено, что эта нелинейность является причиной возникновения разрывов скорости жидкости и, как следствие, бесконечнолистных спиральных завитков на свободных границах, перемещающихся вместе с потоком. Ситуация оказалась сходной с явлением самопроизвольного возникновения слабых ударных волн в газе, описываемых нелинейным уравнением Римана.

Настоящее сообщение посвящено развитию и применению приближенных подходов к исследованию новых классов неустановившихся двухслойных течений жидкости.

1. Нестационарное взаимодействие потоков жидкостей, разделенных полубесконечной пластиной. Схема течения показана на рис. 1. Полубесконечная пластина расположена на границе раздела двух поступательных потоков невязких жидкостей с плотностями ρ^+, ρ^- и скоростями V^+, V^-. На это течение накладываются малые нестационарные возмущения, вызванные деформацией пластины. Деформация может быть двусторонней, так что уравнениями верхней и нижней сторон пластины будут

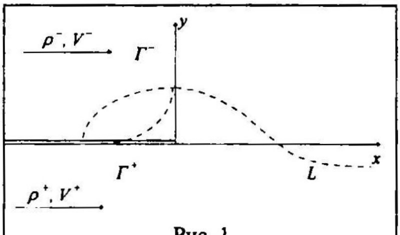

Рис. 1

$$y = f^{\mp}(x,t),\ x<0,\ f^{\mp}(0,t)=0.$$

Течение описывается комплексными потенциалами

$$W^{\pm}(z,\tau) = V^{\pm} z + w^{\pm}(z,\tau),$$

$w^{\pm} = \varphi^{\pm} + i\psi^{\pm}$, $z = x+iy$, $\tau = V^- t/l$, t – время, l – характерная длина.

В приближении линейной теории задача состоит в определении потенциалов возмущений $w^{\pm}(z,\tau) = \varphi^{\pm} + i\psi^{\pm}$ в $D^{\pm}$ по известным значениям $\psi^{\pm}(x,\tau)$ на берегах разреза Γ_0 ($y=\pm 0,\ x<0$) и условиям сопряжения на линии L_0 ($y=0,\ x>0$)

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\varphi^+ - \gamma\,\varphi^-) + \frac{\partial}{\partial x}(\beta\,\varphi^+ - \gamma\,\varphi^-) = 0,\ \beta = V^+/V^-,\ \gamma = \rho^-/\rho^+,$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\psi^+ - \psi^-) + \frac{\partial}{\partial x}(\psi^+ - \beta\,\psi^-) = V^-(1-\beta)\frac{\partial f^{\pm}(0,\tau)}{\partial\tau}, \qquad (1)$$

полученным из динамического и кинематического условий взаимодействия потоков на жидкой границе раздела.

Положим $w^{\pm} = w_1 + w_2^{\pm}$, обозначив через $w_1(z, \tau)$ аналитическую в D_z функцию, удовлетворяющую на разрезе Γ_0 условию $\operatorname{Im} w_1(x, \tau) = \psi^{\pm}(x, \tau)$. Она находится как решение задачи Шварца.

Для определения $w_2^{\pm}(z, \tau)$ перейдем к их изображениям по Лапласу относительно τ. Обозначая изображения соответствующими заглавными буквами $W_2^{\pm}(z, s) = L_s w_2^{\pm}(z, \tau)$, s – параметр изображения, получим из (1) соответствующую систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно функций $\Phi_2^{\pm}(x,s)$ и $\Psi_2^{\pm}(x,s)$

$$L_1(\Phi_2^{\pm}, \Phi_{2,x}^{\pm}) = P_1(x,s), \tag{2}$$

$$L_2^*(\Psi_2^{\pm}, \Psi_{2,x}^{\pm}) = P_2^*(x,s). \tag{3}$$

Используем представление искомых функций в виде решений смешанных краевых задач для полуплоскости

$$\begin{pmatrix} W_2^+ \\ W_2^- \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{z}}{\pi i}\int_0^{\infty}\begin{pmatrix} -\Phi_2^+ \\ \Phi_2^- \end{pmatrix}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi(\xi - z)}} + \begin{pmatrix} K_1(s) \\ K_2(s) \end{pmatrix} 2i\sqrt{z}$$

с произвольными пока функциями $K_1(s)$, $K_2(s)$. Отсюда при $z = x > 0$ найдем

$$\begin{gathered} \Psi_2^{\pm}(x, s) = \pm A\Phi_2^{\pm} + 2K^{\pm}\sqrt{x}, \\ \Psi_{2,x}^{\pm}(x, s) = \pm A\Phi_{2,x}^{\pm} + (K^{\pm} \pm M_2^{\pm}) / \sqrt{x}, \end{gathered} \tag{4}$$

где $Ar = \dfrac{\sqrt{x}}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{r\, d\xi}{\sqrt{\xi(\xi - x)}}$, $M_2^{\pm} = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\frac{d\Phi_2^{\pm}}{dx}dx.$

Соотношения (4) и тождество $A\ln x = \pi$ позволяют записать уравнение (3) в виде интегрального уравнения

$$AR = Q(x,s) + \pi D(s) - 2K_1(s)\sqrt{xs} - \frac{H - M - K_2}{\sqrt{x}} \tag{5}$$

относительно функции

$$R(x, s) = \beta\Phi_{2,x}^{+} + \gamma\,\Phi_{2,x}^{-} + s(\Phi_2^{+} + \Phi_2^{-}) + D(s)\ln x,$$

в котором $Q(x,s)$, $H(s)$ – известные, а $(K_1, K_2) = K^{+} - (1, \beta)K^{-}$, $M = M_2^{+} + \beta M_2^{-}$, $D(s)$ – неизвестные и произвольные пока функции.

При условии

$$K_2 = H - M \tag{6}$$

из (5) можно получить для dR/dx интегральное уравнение вида $Ar = f$ с правой частью, удовлетворяющей условию Липшица всюду, за исключением точки $x = 0$, где она имеет особенность $O(x^{-1/2})$, и обращающейся в нуль при $x \to \infty$. Применяя к этому уравнению формулу обращения $f = -Bf + b$, где b=const,

$$Bf = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(\xi)}{\xi - x}d\xi,$$

найдем dR/dx и затем $R(x,s)$. В результате вместо (3) получим линейное дифференциальное уравнение

$$L_2(\Phi_2^\pm, \Phi_{2,x}^\pm) = P_2(x). \tag{7}$$

Решение системы уравнений (2), (7) находится с помощью интегрального преобразования Лапласа. Оно содержит неизвестные функции $K_1(s)$, $K_2(s)$, $D(s)$. Уравнения для их определения получим из условий ограниченности вертикальных составляющих скоростей жидкости в точке $x = 0$ и ограниченности перепада давлений на пластине при $x \to -\infty$. При этом уравнение (6) оказывается следствием уравнений, полученных из этих условий.

Получены решения задачи для произвольных колебаний и деформаций пластины, а также для угловых гармонических колебаний ее кормовой части, имитирующих машущий движитель. Вычислены нестационарные силы, действующие на пластину, и найдено уравнение границы раздела потоков, из которого следует, что при развитии нестационарных течений с различными поступательными скоростями касательная к линии раздела потоков в точке схода ее с пластины составляет с ней переменный угол, закон изменения которого со временем определяется заданными условиями. Горизонтальные составляющие скорости в этой точке имеют логарифмические особенности $\varphi_x^\pm \sim d(\tau)\ln x$.

В задаче о машущем движителе получены формулы для силы тяги и КПД движителя. Так, если вращательные колебания заданы уравнением

$$y = f(x)\exp(j\omega\tau),$$

$$f(x) = \alpha(x + l)U(x + l),$$

$x < 0$, α=*const*, *U(x)* – единичная функция, то коэффициент средней за период колебаний силы тяги R

$$C_R = \frac{2R}{\rho^-(\alpha V^-)^2 l} = \frac{1+\gamma}{\pi\gamma}\left(\frac{8}{9}\omega^2 - 2\frac{\beta^2+\gamma}{1+\gamma}\right).$$

Если определить КПД движителя μ как отношение полезной работы $A = 2\pi R V^- / \omega$, совершаемой системой в обращенном движении со скоростью V^-, к затраченной, то

$$\mu = \frac{1+\gamma}{\beta+\gamma}\left[\frac{1}{2} - \frac{8}{9\omega^2}\frac{\beta^2+\gamma}{1+\gamma}\right].$$

Видно, что в отличие от однородного потока КПД может стать больше единицы, что свидетельствует о переходе механической энергии от потока к системе пластина-движитель. При оценке этих результатов нужно, однако, иметь в виду, что они получены без учета влияния внутренних волн, которые могут возникнуть на границе раздела при учете весомости жидкостей и поверхностного натяжения.

Приведенные результаты изложены в статьях [4, 5]. В статьях [6, 7] рассмотрены аналогичные задачи взаимодействия потоков, заключенных в канале с плоскими неподвижными стенками. Полученные решения допускают переход к случаю безграничных потоков, однако такой переход является особым. В то время как в случае канала возмущения границы раздела потоков всюду конечные, в случае безграничных потоков они неограниченно возрастают при удалении вниз по потоку.

2. Неустановившееся отрывное обтекание препятствия. Рассматривается отрывное обтекание пластины, нормальной к потоку и совершающей гармонические поступательные колебания относительно стационарного положения. Стационарное обтекание моделируется схемой Кирхгофа с отличной, однако, от нуля плотностью среды в следе, так что в отличие от задачи о нестационарных течениях со свободными границами в этом случае будем учитывать взаимодействие внешнего течения и течения в следе, возбуждаемого колебаниями препятствия.

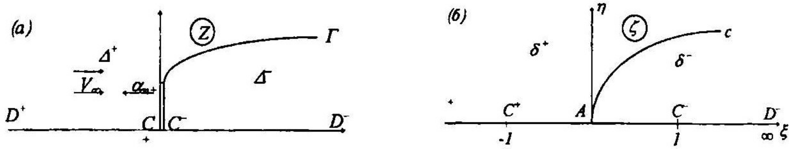

Рис. 2

Верхняя половина области течения показан на рис. 2а. D^+CD^- – ось симметрии, C^+AC^- – пластина шириной l_1, Γ – стационарная (свободная) граница при струйном обтекании, V_∞ – скорость натекающего потока; индексы $\pm$ отмечают, соответственно, параметры внешнего и внутреннего течений, $\alpha_{n^+} = \alpha \exp(j\omega\tau)$ – вектор поступательных перемещений пластины, $\alpha = const$ – амплитуда, $\tau = V_\infty t / l_1$, t – время, $n^\pm$ – внутренние нормали к границам областей $D^\pm$, $v_{n^\pm} = \pm v \exp(j\omega\tau)$ – скорости точек пластины, $v = j\omega \alpha V_\infty / l_1$. Комплексные потенциалы течений представим в виде

$$W^\pm(z,\tau) = w_0^\pm(z) + w^\pm(z,\tau).$$

Функция $w_0^+(z)$ известна из решения стационарной задачи, $w_0^-(z) = 0$. Функция $z = i l_1 \sqrt{1-\varsigma^2}$ отображает область D_ς (рис. 2б) на область D_z – верхнюю полуплоскость z с разрезом по линии C^+AC^-, c – образ линии Γ.

Для установившихся гармонических колебаний потенциалы возмущений представляются в виде $w^\pm(\varsigma,\tau) = \widetilde{w}^\pm(\varsigma)\exp(j\omega\tau)$, так что задача сводится к отысканию функций $\widetilde{w}^\pm(\varsigma)$ (в дальнейшем знак ~ опустим) по значениям их мнимых частей на оси ξ и условиям сопряжения на c

$$\begin{gathered} j\omega(\gamma\varphi^+ - \varphi^-) + \gamma\varphi_s^+ = 0, \\ j\omega(\varphi^+ - \varphi^-) - \varphi_s^- = l_1 v, \end{gathered} \tag{8}$$

вытекающим из динамического и кинематического условий на границе раздела потоков; s – безразмерная длина дуги Γ, отсчитываемая от точки A. Систему уравнений (8) можно записать в виде одного уравнения

$$w^+ - w^- = \lambda(s),$$

в котором

$$\lambda(s) = \lambda_1(s) + i\lambda_2(s), \quad \lambda_1(s) = (1-\gamma)\varphi^+ - \frac{\gamma}{j\omega}\psi_s^+, \quad \lambda_2(s) = \frac{1}{j\omega}(l_1 v - \psi_s^-).$$

Положим

$$w^\pm(\varsigma) = w_1(\varsigma) + w_2^\pm(\varsigma),$$

где

$$w_1(\varsigma)=l_1 v(\varsigma - i\sqrt{1-\varsigma^2})$$

– функция, удовлетворяющая условию $Jmw_1(\xi)=Jmw^{\pm}(\xi)$, $\xi\in(-\infty,\infty)$, так что $Jmw_2^{\pm}(\xi)=0$. После продолжения функций $w_2^{\pm}(\varsigma)$ на нижнюю полуплоскость придем к задаче определения функции $w_2(\varsigma)$ в плоскости ς по скачку

$$w_2^+ - w_2^- = \begin{cases}\lambda(\varsigma), & \varsigma\in c,\\ \bar{\lambda}(\varsigma), & \varsigma\in\bar{c},\end{cases}$$

где

$$\lambda=\lambda_1+i\lambda_2,$$

$$\lambda_1(s)=(1-\gamma)\varphi_2^+(s)-\frac{\gamma}{j\omega}\varphi_{2s}^+ +(1-\gamma)\varphi_1(s)-\frac{\gamma}{j\omega}\varphi_{1s},$$

$$\lambda_2(s)=\frac{1}{j\omega}\psi_{2s}^- +\frac{1}{j\omega}(l_1 v-\psi_{1s}). \tag{9}$$

Для решения этой задачи, считая правую часть известной, используем аналог интеграла типа Коши [8]. Учитывая свойства симметрии, будем иметь

$$w_2(\varsigma)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_c\frac{\lambda(\tau)}{\tau-\varsigma}\,\frac{\varsigma-\varsigma_0}{\tau-\varsigma_0}d\tau-\int_c\frac{\bar{\lambda}(\tau)}{\bar{\tau}-\varsigma}\,\frac{\varsigma-\varsigma_0}{\bar{\tau}-\varsigma}d\bar{\tau}\right),\quad \varsigma_0\;\overline{\in}\;c.$$

Подставляя найденные отсюда значения $\varphi_2^+(s)$, $\psi_2^-(s)$ в уравнения (9), получим систему линейных интегральных уравнений относительно $\lambda_k(s)$, $k=1,2$. Для решения этой системы использовался метод моментов. Функции $\tilde{\lambda}_k(s)=\lambda_k(s)-\lambda_{k_0}(s)$, где $\lambda_{k_0}(s)$ – известные функции, учитывающие характерные особенности искомых, отыскивались в виде $\tilde{\lambda}_1(s)=\sum_{k=0}^{n}a_k e^{-ks}$, $\tilde{\lambda}_2(s)=\sum_{k=0}^{n}b_k e^{-ks}$. Линейная система уравнений для коэффициентов, полученная методом моментов, решалась численно. Предварительные расчеты выполнены для случая $\gamma=1$, $\omega=1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта 551 программы «Университеты России».

ЛИТЕРАТУРА

1. Налимов В. И., Пухначев В. В. *Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей.* – Новосибирск: Изд-во Новосибирского ун-та, 1975. – 175 с.

2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Проблемы гидродинамики и их математические модели.* – М.: Наука, 1973. – 416 с.

3. Кузнецов А. В. *Эффект нелинейности при нестационарных возмущениях струйного обтекания препятствия потоком идеальной жидкости* // Изв. РАН. МЖГ. – 1995. – №5. – С. 72 – 78.

4. Кузнецов А. В., Кузнецов С. А. *Нестационарное взаимодействие двух потоков жидкостей, разделенных полубесконечной деформированной пластиной* // Изв. РАН. МЖГ. – 1994. – №1. – С. 55 – 64.

5. Кузнецов А. В., Кузнецов С. А. *Гармоническое колебание пластины в двухслойном потоке несжимаемой жидкости* // Проблемы гидродинамики больших скоростей. – Чебоксары, 1993. – С. 65 – 74.

6. Кузнецов А. В., Кузнецов С. А. *Нестационарное взаимодействие двух потоков жидкостей, разделенных полубесконечной деформированной пластиной, в канале с плоскими стенками* // Изв. РАН. МЖГ. – 1997. – №1. – С. 67 – 76.

7. Кузнецов А. В., Кузнецов С. А. *Об одной задаче нестационарного взаимодействия потоков жидкости в канале* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – №1. – С. 71 – 74.

8. Чибрикова Л. И. *Об одном особом случае задачи Римана на неограниченном контуре, 1* // Труды семинара по краевым задачам. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. – Вып. 15. – С. 139 – 167.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ И КОНФОРМНОЙ ИНВАРИАНТНОСТЕЙ В ПРОБЛЕМЕ ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ КРАТНОГО ИНТЕГРАЛА

С. В. Никифорова

КГТУ им. А. Н. Туполева, г. Казань

Конструирование дивергентных форм с использованием теоремы Э. Нётер. Рассматривается функционал